

SPE-WVS-572

Acoplamiento de Flujo de Fluido y Geomecanica de Yacimientos: Un Enfoque Basado en Elementos Finitos

Autor (es): Jose Moreno, Atilio Morillo, Francisco Luengo, Maika Gambus, SPE, Nohelis Rincon, Orlando Zambrano, SPE, Varinia Marcano, SPE, Robert Quintero, y Oswaldo Larreal, Wilson Camargo, y Elbano Morales, Universidad del Zulia, y Carlos Alciaturi, Inziti Cicasí.

Sesión: Automatización de Procesos

This paper was prepared for presentation at the 2015 SPE WVS 3er South American Oil and Gas Congress held in Maracaibo, Zulia State, Venezuela, 27–30 October 2015.

This paper was selected for presentation by the SPE Western Venezuelan Petroleum Section Program Committee, following review of information contained in an abstract submitted by the author(s). Contents of the paper have not been reviewed by the SPE Western Venezuelan Petroleum Section Program Committee and are subject to correction by the author(s). The material does not necessarily reflect any position of SPE Western Venezuelan Petroleum Section, its officers, or members. Electronic reproduction, distribution, or storage of any part of this paper without written consent of the SPE Western Venezuelan Petroleum Section is prohibited. Permission to reproduce in print is restricted to an abstract of not more than 350 words; illustrations may not be copied.

Abstract

This paper presents the progress and improvements made in our task of developing a simulation platform for a coupled fluid flow and rock deformation system. We describe the reservoir using the three phase black oil model, and consider the geomechanics from a poroelastic approach as an interacting system.

The numerical problem to be solved is formulated in terms of the continuous Galerkin finite element, and the codification program has been elaborated using the C++ language, implemented by intensively using of the getfem++ generic library. For the analysis of the coupled geomechanics and multiphase flow we employ an iterative procedure.

The characteristics of the employed methodology, allows to develop a program that runs independently of the shape of the elements (lineal, quadratic, polynomial, etc), of the degree of freedom of them, and of the applied numerical integration method. Additionally it has been equipped with suitable “solvers” to handle one phase, two phases, black oil, coupling or uncoupling with the geomechanics.

To validate the capability of the encoded program and the developed procedure several study cases with known analytic solution and also a practical case have been implemented, matching the results with a commercial simulator.

Introducción

El rol que juega la geomecánica en la producción de yacimientos petrolíferos, sin lugar a duda, de mucha importancia y debe ser considerada en detalle (Gutierrez and Lewis¹). Se ha demostrado que, simplificar, o peor aún, no tomar en cuenta la naturaleza precisa del acople entre el medio poroso deformable y el flujo de fluidos, puede conllevar a incorrectas predicciones de resultados que son utilizados en los procesos de toma de decisiones para adoptar técnicas eficientes secundarias y terciarias de recuperación de petróleo.

Por consiguiente, diversos autores han establecido expresiones más rigurosas para modelar la porosidad y permeabilidad¹. No obstante, esto requiere que las ecuaciones de equilibrio de esfuerzo y flujo de fluidos se resuelvan de manera simultánea, lo cual, dependiendo del tipo de yacimiento a resolver, es recomendable usar un modelo simplificado o no.

En la comunidad de ingenieros de yacimientos, a fin de resolver dichas ecuaciones, es comúnmente utilizado el Método de Diferencias Finitas (MDF) para discretizar espacialmente las ecuaciones gobernantes. Esta preferencia se debe a gran medida a la fácil implementación del MDF en comparación con los otros métodos existentes en la actualidad. Por otro lado, el Método de Elementos Finitos (MEF) es cada vez más utilizado en esta comunidad, a pesar de requerir de algoritmos mucho más complejos en su

implementación, pero por su enfoque variacional y su flexibilidad frente a contornos muy complejos, lo convierte en un método potencialmente más ventajoso en comparación con el MDF (Gottardi and Mesini²).

En este artículo se presenta el desarrollo de un programa para abordar el estudio de yacimientos acoplados o no acoplados con la geomecánica. Se utiliza un enfoque modular para resolver las ecuaciones de equilibrio de esfuerzo (geomecánica) y flujo de fluidos de manera independiente. La comunicación entre los módulos se hace bajo la estrategia de “two-coupling”, donde la información proporcionada por el módulo de flujo de fluidos es el incremento de presión de poro, y del módulo geomecánico es el desplazamiento.

La discretización espacial se lleva a cabo mediante el método de elementos finitos de Galerkin para mallas híbridas no estructuradas, mientras que la discretización temporal se hace por medio del método de diferencias finitas. Los métodos de integración y orden de los elementos pueden ser seleccionados por el usuario, los cuales pueden escogerse dentro de una variedad de métodos predefinidos (Yvez Renard and Julien Pommier³). El programa ha sido desarrollado en el lenguaje de programación C++, bajo un enfoque orientado a objetos, y se ha usado extensivamente la librería genérica de elementos finitos `getfem++`.

Referente al modelo matemático, se describe el desarrollo de tres modelos distintos para el comportamiento del flujo de fluidos: una fase, dos fases (petróleo-agua), y tres fases (petróleo-negro). Las ecuaciones se formulan adecuadamente para la implementación del MEF y la técnica de solución simultánea (SS), seleccionando como variables primarias las presiones y desplazamientos. Por otro lado, el acople entre ambos modelos se realiza por medio del parámetro de porosidad, sin tomar en cuenta la relación de la deformación con la permeabilidad, además, son considerados los efectos gravitatorios y las relaciones de permeabilidad relativa.

Por último, para validar la capacidad del programa codificado y el proceso desarrollado, son implementados dos casos de estudio, uno con solución analítica y otro práctico. Además, los resultados son igualados con un simulador comercial.

Modelo Matemático

Los modelos matemáticos que se utilizan están basados en las siguientes suposiciones:

- Se asumen condiciones isotérmicas.
- Las deformaciones del material sólido se consideran pequeñas, lo cual es suficiente para suponer una conducta elástica lineal del material.
- Las condiciones de equilibrio se expresan en forma cuasi-estática, y no se toman en cuenta los efectos inerciales.
- Las propiedades mecánicas del material se consideran isotrópicas.
- El flujo de fluidos se considera caracterizado por la ley de Darcy.
- Se asume que los poros se encuentran totalmente saturados por los fluidos presentes.

Conviene destacar que dichas suposiciones se extenderán en forma particular para cada uno de los modelos matemáticos que se describen.

Modelo Geomecánico (Ecuación de equilibrio)

La ecuación gobernante del modelo geomecánico se obtiene de la combinación de la ecuación de equilibrio de esfuerzos y dos relaciones constitutivas: relación deformación-desplazamiento y la relación esfuerzo-deformación-presión.

La ecuación de equilibrio de esfuerzo se expresa como:

$$\nabla \cdot \sigma + F = 0 \quad \text{Ec. (1)}$$

Donde σ es el tensor de esfuerzo, y F es el vector de fuerza sobre el cuerpo.

Integrando la ecuación para el Principio de Esfuerzo Efectivo de Terzaghi, y considerando la suposición de pequeñas deformaciones y propiedades elásticas isotrópicas del material, la relación de esfuerzo-deformación-presión se define por medio de la ley de Hooke generalizada como:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} - \alpha(p - p^0) \delta_{ij} \quad \text{Ec. (2)}$$

En la cual, λ y μ son los coeficientes de Lamé, y α , p , σ^0 , ε y δ son el coeficiente de Biot, presión de poro, tensor de esfuerzo inicial, tensor de deformación y el delta de Kronecker, respectivamente.

El tensor de deformación se puede expresar en términos de los desplazamientos por medio de la relación deformación-desplazamiento siguiente:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}[\nabla u + (\nabla u)^T] \quad \text{Ec.(3)}$$

Asumiendo λ y μ como propiedades homogéneas, la combinación de las ecuaciones (1), (2) y (3), resulta:

$$(\lambda + \mu)\nabla(\nabla \cdot u) + \mu\nabla^2 u = \alpha\nabla(p - p^0) - \rho_r g \quad \text{Ec.(4)}$$

Donde ρ_r es la densidad de la roca y g es el campo gravitatorio.

Porosidad

La diferencia entre las ecuaciones de flujo de fluido de los modelos acoplados y no, es básicamente el enfoque utilizado para expresar la porosidad.

La porosidad se define en sus formas euliana y lagrangiana como:

$$\varphi = \frac{V_p}{V_b} \quad \phi = \frac{V_p}{V_b^0} \quad \text{Ec.(5)}$$

Donde φ , ϕ , V_p , V_b y V_b^0 son la porosidad euliana, porosidad lagrangiana, volumen poroso, volumen neto y volumen neto en su configuración inicial.

Las porosidades euliana y lagrangiana se relacionan con la deformación volumétrica por medio de la expresión:

$$\phi = (1 + \varepsilon_v)\varphi \quad \text{Ec.(6)}$$

La deformación volumétrica por su parte depende de la distribución de la presión de poro y los esfuerzos totales. No obstante, para el modelamiento de yacimientos consolidados, la porosidad se puede aproximar por una función lineal de la presión como:

$$\phi = \phi^0 [1 + C_p(p - p^0)] \quad \text{Ec.(7)}$$

Donde, C_p es la compresibilidad de poro, definida como:

$$C_p = \frac{C_b - (1 + \phi^0)C_s}{\phi^0} \quad \text{Ec.(8)}$$

C_b , ϕ^0 y C_s son la compresibilidad total, porosidad de referencia y compresibilidad del esqueleto sólido, respectivamente.

Tomando en cuenta los efectos del esfuerzo total en las deformaciones volumétricas, la variación de la porosidad según Gertsma⁴, obtiene la forma:

$$\phi = \phi^0 + \alpha(\varepsilon_v - \varepsilon_v^0) + \frac{1}{M}(p - p^0) \quad \text{Ec.(9)}$$

Donde, $\alpha = 1 - \frac{C_s}{C_b}$, $\varepsilon_v = \nabla \cdot u$, y

$$\frac{1}{M} = (1 - \alpha)(\alpha - \varphi^0) \quad \text{Ec.(10)}$$

La ecuación (10) puede expresarse en término de las variables primarias de desplazamiento como:

$$\varphi = \varphi^0 + \alpha(\nabla \cdot u - \nabla \cdot u^0) + \frac{1}{M}(p - p^0) \quad \text{Ec.(11)}$$

Ecuación de Flujo de Fluidos

El comportamiento del flujo de fluido através de un medio poroso deformable se obtiene de la combinación de la ley de Darcy, la ecuación de continuidad, y la relación de la porosidad (7), o(9) para yacimientos acoplados, o no, repectivamente.

En presencia de un solo fluido, considerado ligeramente compresible, esta quedadefinida como:

$$\frac{1}{M} \frac{\partial p}{\partial t} \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} K(\nabla p - \rho g) \right) = -\alpha \nabla \cdot \frac{\partial u}{\partial t} + q \quad \text{Ec.(12)}$$

Donde K , p , μ , ρ y q son el tensor de permeabilidad intrínseca, presión, viscosidad, densidad y termino fuente o sumidero del fluido, respectivamente.

Notando que para un modelo desacoplado, el primer término del lado derecho de la ecuacion(12) debe ser igualado a cero.

Para el caso de varias fases presentes, deben considerarse otras variables extras como son las saturaciones para cada fase. Además, deben tomarse en cuenta las relaciones de las presiones capilares entre fases y las permeabilidades relativas para cada fase. Propiedades que se definen por la interacción entre el fluido y el esqueleto sólido.

Capilaridad y Permeabilidad Relativa del Modelo de Dos Fases (Petróleo-Agua)

Las presiones capilares se consideran solo función de las saturaciones (Leverett and Lewis⁵), y el volumen de poro se asume totalmente lleno por las dos fases presentes.

Por lo tanto, las ecuaciones de presión capilar y saturaciones son respectivamente:

$$P_{cow}(S_w) = P_o - P_w \quad \text{Ec.(12)}$$

$$S_o + S_w = 1.0 \quad \text{Ec.(13)}$$

Donde P_{cow} es la presión capilar del sistema petróleo-agua, y P_o , P_w , S_o y S_w son la presión de petróleo, presión de agua, saturación de petróleo y saturación de agua, respectivamente.

También se considera que la presión de poro queda aproximada:

$$p = S_o P_o + S_w P_w \quad \text{Ec.(14)}$$

En la cual, usando las ecuaciones (12) y (13) es posible expresar las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación (14) en término de las variables primarias P_o y P_w de la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = S_o'' \frac{\partial P_o}{\partial t} + S_w'' \frac{\partial P_w}{\partial t} \quad \text{Ec.(15)}$$

Donde se definen: $S_o'' = S_o - P_{cow} S_w'$, $S_w'' = S_w + P_{cow} S_w'$ y $S_w' = \frac{\partial S_w}{\partial P_{cow}}$

Respecto a la permeabilidades relativas del agua y del petróleo, se asume que tienen la siguiente forma:

$$k_w = k_w(S_w) \quad ; \quad k_o = k_o(S_w) \quad \text{Ec.(16)}$$

Ecuación de Flujo de Fluidos del Modelo de Dos Fases (Petróleo-Agua)

Las ecuaciones de flujo de fluido para dos fases inmiscibles en un medio poroso deformable se obtienen, como se mencionó anteriormente, por medio de la combinación de la ley de Darcy y la conservación de la masa para cada una de las fases. Tomando en cuenta los efectos gravitatorios, la compresibilidad del fluido y las relaciones capilares, las ecuaciones para cada una de las fases resultan:

Fase Petróleo:

$$\left[\frac{S_o}{B_o} \frac{1}{M} S_o'' - \frac{\phi S_w'}{B_o} + \phi S_o b_o \right] \frac{\partial P_o}{\partial t} + \left[\frac{S_o}{B_o} \frac{1}{M} S_w'' + \frac{\phi S_w'}{B_o} \right] \frac{\partial P_w}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{K k_o}{\mu_o B_o} (\nabla P_o - \rho_o g) \right) = - \frac{S_o}{B_o} \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot u) + \frac{Q_o}{\rho_{o_std}} \quad \text{Ec.(17)}$$

Donde $Q_o = \frac{q_{o_std} \rho_{o_std}}{B_o}$, $\rho_o = \frac{\rho_{o_std}}{B_o}$ es la densidad de la fase petróleo y q_{o_std} , ρ_{o_std} y B_o son el término fuente o sumidero de la fase petróleo a condiciones estándar, densidad de la fase petróleo a condiciones estándar y factor volumétrico de la fase petróleo, respectivamente.

Fase Agua:

$$\left[\frac{S_w}{B_w} \frac{1}{M} S_o'' + \frac{\phi S_w'}{B_w} \right] \frac{\partial P_o}{\partial t} + \left[\frac{S_w}{B_w} \frac{1}{M} S_w'' - \frac{\phi S_w'}{B_w} + \phi S_w b_w \right] \frac{\partial P_w}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\frac{K k_w}{\mu_w B_w} (\nabla P_w - \rho_w g) \right) = - \frac{S_w}{B_w} \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot u) + \frac{Q_w}{\rho_{w_std}} \quad \text{Ec.(18)}$$

Donde $Q_w = \frac{q_{w_std} \rho_{w_std}}{B_w}$, $\rho_w = \frac{\rho_{w_std}}{B_w}$ es la densidad de la fase agua, y q_{w_std} , ρ_{w_std} y B_w es el término fuente o sumidero de la fase agua a condiciones estándar, densidad de la fase agua a condiciones estándar y factor volumétrico de la fase agua, respectivamente.

Por otro lado, para un medio poroso no deformable, la porosidad ϕ y el término acumulativo $\frac{I}{M}$ son remplazados por las ecuaciones (7) y (8), respectivamente. Además, el primer término del lado derecho de las ecuaciones (17) y (18) deben ser igualados a cero. Por lo tanto, con solo realizar algunas modificaciones a las ecuaciones (17) y (18), se pueden resolver los modelos de yacimientos acoplados y no acoplados en un solo módulo de cálculo, siempre y cuando el acople con la geomecánica se realice de forma independiente. Y es por esa razón, que las derivadas con respecto al tiempo de los desplazamientos son considerados aquí como término fuente.

Capilaridad y Permeabilidad Relativa del Modelo de Tres Fases (Petróleo-Negro)

Realizando las mismas consideraciones tomadas para el modelo de dos fases, las ecuaciones de presión capilar y presión de poro se expresan como:

$$P_{cow}(S_w) = P_o - P_w \quad \text{Ec.(19)}$$

$$P_{cgo}(S_g) = P_g - P_o \quad \text{Ec.(20)}$$

$$S_o + S_w + S_g = 1.0 \quad \text{Ec.(21)}$$

$$p = S_o P_o + S_w P_w + S_g P_g \quad \text{Ec.(22)}$$

Donde P_{cgo} es la presión capilar del sistema gas-petróleo, P_g es la presión de gas y S_g es la saturación del gas.

Usando las ecuaciones (19), (20) y (21), se puede expresar la derivada con respecto al tiempo de la ecuación (22) en términos de las variables primarias P_o , P_w y P_g en la forma:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = S_o'' \frac{\partial P_o}{\partial t} + S_w'' \frac{\partial P_w}{\partial t} + S_g'' \frac{\partial P_g}{\partial t} \quad \text{Ec.(23)}$$

Donde

$$S_o'' = S_o - P_{cgo} S_g' - P_{cow} S_w', \quad S_w'' = S_w + P_{cow} S_w', \quad S_g'' = S_g + P_{cgo} S_g', \quad S_w' = \frac{\partial S_w}{\partial P_{cow}} \quad \text{y} \quad S_g' = \frac{\partial S_g}{\partial P_{cgo}}$$

Con respecto a las permeabilidades relativas, estas son aproximadas de manera similar al caso anterior de dos fases, y tienen la forma:

$$k_w = k_w(S_w) \quad ; \quad k_g = k_g(S_g) \quad ; \quad k_{ow} = k_{ow}(S_w) \quad ; \quad k_{og} = k_{og}(S_g) \quad \text{Ec.(24)}$$

Donde k_g es la permeabilidad relativa del gas, k_{ow} es la permeabilidad relativa del petróleo en el sistema capilar petróleo-agua y k_{og} es la permeabilidad relativa del petróleo en el sistema capilar gas-petróleo. La permeabilidad relativa k_o de la fase petróleo se calcula utilizando el modelo de Stone II:

$$k_o = k_{ow}^0 \left[\left(\frac{k_{ow}}{k_{ow}^0} + k_w \right) \left(\frac{k_{og}}{k_{ow}^0} + k_g \right) - (k_w - k_g) \right] \quad \text{Ec.(25)}$$

En la cual k_{ow}^0 es la permeabilidad relativa de la fase petróleo a saturación de agua residual.

Ecuación de Flujo de Fluidos del Modelo de Tres Fases (Petróleo-Negro)

Del mismo modo que en el caso anterior de dos fases, las ecuaciones gobernantes de flujo de fluidos para tres fases inmiscibles en un medio poroso deformable se obtienen por medio de la combinación de la ley de Darcy y la conservación de la masa para cada una de las fases. Tomando en cuenta las relaciones capilares, compresibilidad de los fluidos, y efecto de la gravedad, las ecuaciones para cada una de las fases resultan de la forma:

FasePetróleo:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{S_o}{B_o} \frac{1}{M} S_o'' - \frac{\phi S_w'}{B_o} + \phi S_o b_o + \frac{\phi S_g'}{B_o} \right] \frac{\partial P_o}{\partial t} + \left[\frac{S_o}{B_o} \frac{1}{M} S_w'' + \frac{\phi S_w'}{B_o} \right] \frac{\partial P_w}{\partial t} + \left[\frac{S_o}{B_o} \frac{1}{M} S_g'' - \frac{\phi S_g'}{B_o} \right] \frac{\partial P_g}{\partial t} \\ & + \nabla \cdot \left(\frac{K k_o}{\mu_o B_o} (\nabla P_o - \rho_o g) \right) = - \frac{S_o}{B_o} \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot u) + \frac{Q_o}{\rho_{o_std}} \end{aligned} \quad \text{Ec.(26)}$$

Y la notación significa: $Q_o = \frac{q_{o_std} \rho_{o_std}}{B_o}$, $\rho_o = \frac{R_{so} \rho_{g_std} + \rho_{o_std}}{B_o}$ y $b_o = \frac{\partial}{\partial P_o} \left(\frac{1}{B_o} \right)$. Y donde R_{so} es el volumen de gas disuelto en la fase petróleo por unidad de volumen de petróleo a condiciones estándar.

Fase Agua:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{S_w}{B_w} \frac{1}{M} S_o'' + \frac{\phi S_w'}{B_w} \right] \frac{\partial P_o}{\partial t} + \left[\frac{S_w}{B_w} \frac{1}{M} S_w'' - \frac{\phi S_w'}{B_w} + \phi S_w b_w \right] \frac{\partial P_w}{\partial t} + \left[\frac{S_w}{B_w} \frac{1}{M} S_g'' \right] \frac{\partial P_g}{\partial t} \\ & + \nabla \cdot \left(\frac{K k_w}{\mu_w B_w} (\nabla P_w - \rho_w g) \right) = - \frac{S_w}{B_w} \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot u) + \frac{Q_w}{\rho_{w_std}} \end{aligned} \quad \text{Ec.(27)}$$

Donde

$$Q_w = \frac{q_{w_std} \rho_{w_std}}{B_w}, \quad \rho_w = \frac{\rho_{w_std}}{B_w} \quad y \quad b_w = \frac{\partial}{\partial P_w} \left(\frac{1}{B_w} \right)$$

Fase Gas:

$$\begin{aligned} & \left[\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \frac{1}{M} S_o'' - \frac{\phi S_g'}{B_g} - \frac{R_{so} \phi S_w'}{B_o} + \frac{R_{so} \phi S_g'}{B_o} + R_{so} S_o \phi b_o + \frac{S_o \phi r_{so}}{B_o} \right] \frac{\partial P_o}{\partial t} + \left[\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \frac{1}{M} S_w'' + \frac{R_{so} \phi S_w'}{B_o} \right] \frac{\partial P_w}{\partial t} \\ & + \left[\left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \frac{1}{M} S_g'' + \frac{\phi S_g'}{B_g} + S_g \phi b_g - \frac{R_{so} \phi S_g'}{B_o} \right] \frac{\partial P_g}{\partial t} \\ & + \nabla \cdot \left(\frac{K k_g}{\mu_g B_g} (\nabla P_g - \rho_g g) + \frac{R_{so} K k_o}{\mu_o B_o} (\nabla P_o - \rho_o g) \right) = - \left(\frac{S_g}{B_g} + \frac{R_{so} S_o}{B_o} \right) \alpha \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \cdot u) + \frac{Q_g}{\rho_{g_std}} \end{aligned} \quad \text{Ec.(28)}$$

Donde

$$b_g = \frac{\partial}{\partial P_g} \left(\frac{1}{B_g} \right), \quad r_{so} = \frac{\partial R_{so}}{\partial P_o} \quad y \quad Q_g = \frac{q_{g_std} \rho_{g_std}}{B_g} + \frac{q_{o_std} R_{so} \rho_{g_std}}{B_o}$$

Deigual manera, para un medio poroso no deformable, la porosidad se define con la ecuación (7) y el término $\frac{1}{M}$ es sustituido por la ecuacion (8). Así mismo, el primer término del lado derecho de las ecuaciones (26), (27) y (28) deben ser igualados a cero.

Discretización Espacial y Temporal

El método de elementos finitos de Galerkinse utiliza para la discretización espacial de las ecuaciones gobernantes y el método de diferencias finitas para ladiscretización temporal, usando un esquema totalmente implícito.

Mediante el metodo de elementos finitos, el dominio es dividido en subregiones (elementos), no solapados, definidos por un conjunto de nodos geométricos conectados. Estos elementos pueden ser tanto lineales como no lineales, y formas geométricas distintas, como: tetraedros, hexaedros, pirámides, prismas, etc.

El campo de desplazamiento y presión son aproximados por medio de la combinación de un numero de funciones polinomiales continuas a trazos. Representadas de forma general:

$$u_\alpha(x, t) = \sum_{i=1}^{nb \text{ dof}} u_{\alpha,i}(t) N_{ui}(x) \quad \text{Ec. (29)}$$

$$P_\alpha(x, t) = \sum_{i=1}^{nb \text{ dof}} P_{\alpha,i}(t) N_{pi}(x) \quad \text{Ec.(30)}$$

Donde, x es el vector de coordenadas, u_α y P_α son las incógnitas de las ecuaciones, y N_{ui} y N_{pi} son las funciones de forma pertenecientes a cada nodo (grado de libertad) para el modelo geomecánico y flujo de fluidos, las cuales, por razones de continuidad deben cumplir con la siguiente condición:

$$N_i(x^j) = \delta_{ij} \quad \text{Ec.(31)}$$

Dada las aproximaciones de las ecuaciones (29) y (30), la formulación débil y la discreta del problema pueden obtenerse integrando las ecuaciones gobernantes, previamente aproximadas y multiplicadas por funciones de peso igualadas a las funciones de forma N_i (enfoque de Galerkin).

La integración de dichas ecuaciones, por razones de simplicidad, se realiza sobre elementos de referencias (elementos estandarizados en coordenadas locales), automatizando así el proceso que esto involucra. Sin embargo, esto requiere que se realicen las correspondientes transformaciones geométricas entre las coordenadas globales y locales de las ecuaciones resultantes.

En este desarrollo, son utilizados elementos polinomiales lagrangianos, cuyas transformaciones geométricas se muestran en el Apéndice.

Luego del proceso de discretización del método de elementos finitos, las ecuaciones matriciales finales de la ecuación de flujo de fluido y geomecánica resultan:

$$L\{u\} = Q_u \{p - p^0\} + F_u \quad \text{Ec.(32)}$$

$$S \left\{ \frac{dp}{dt} \right\} + H\{p\} = Q_p \left\{ \frac{du}{dt} \right\} + F_p \quad \text{Ec.(33)}$$

Donde L , F_u , Q_p y Q_u son la matriz de rigidez, vector carga y matrices de acople entre desplazamiento y presión, respectivamente. S , H y F_p son la matriz de masa, matriz hidráulica y vector fuente, respectivamente. La discretización de cada una de las matrices se muestran en el Apéndice para cada uno de los modelos de flujo de fluido, y el modelo geomecánico.

Luego se emplea el método de diferencias finitas hacia atrás, de manera de calcular la evolución de la presión y desplazamiento con respecto al tiempo, quedando finalmente:

$$(S + H\Delta t)\{p_{n+1}\} = S\{p_n\} - Q_u\{\Delta u\} + F_p\Delta t \quad \text{Ec.(34)}$$

En problemas no acoplados, la matriz de acople Q_u es igualada a cero, y la discretización de la matriz S se realiza utilizando la ecuación de porosidad (7).

Técnica de Acople

Las ecuaciones de flujo de fluido y geomecánica se resuelven de forma independiente por medio de dos módulos por separado. La información entre ambos módulos se intercambia mediante un módulo de acople en un número necesario de iteraciones para cada paso de tiempo. La estrategia es conocida como two-coupling, en la cual la información es pasada de manera bidireccional.

Referente a la información intercambiada entre los módulos, la proporcionada por el módulo de flujo de fluidos es el incremento de presión de poro con respecto a la presión de poro de referencia, el cual es utilizado por el módulo geomecánico como carga externa, y la información proporcionada por el módulo geomecánico es el incremento de desplazamiento, utilizado por el módulo de flujo de fluidos como término fuente.

Dada la independencia entre ambos módulos, se pueden establecer polinomios de interpolación de grados diferentes para ambos. Sin embargo, se recomienda utilizar grados de interpolación de un grado superior para el módulo geomecánico en comparación con el módulo de flujo de fluido.

Las Figuras (1) y (2) esquematizan este procedimiento.

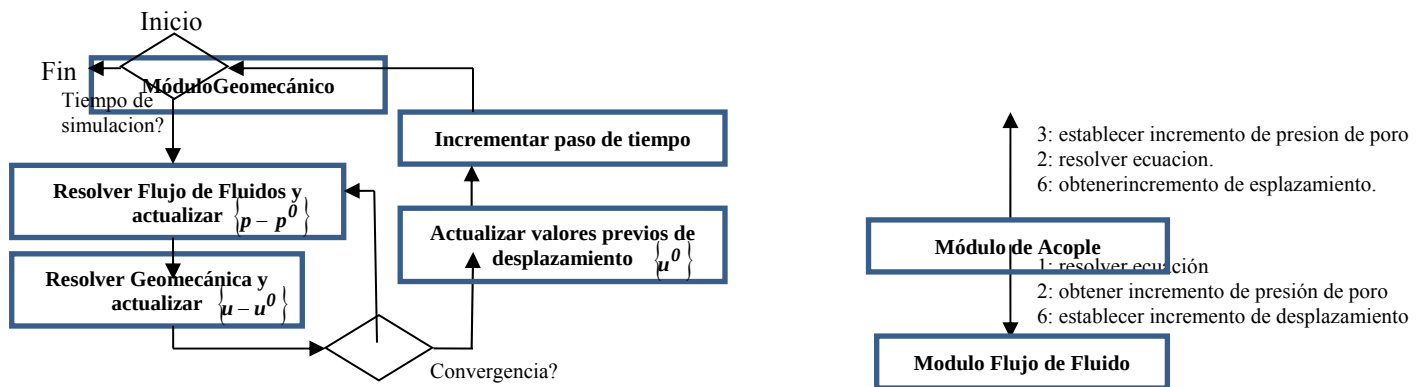


Figura (1): Diagrama de flujo del Acople iterativo. **Figura (2):** Diagrama de comunicacion entre modulos.

Validación

Para validar la codificación del programa y probar las características claves del mismo, se realizan dos pruebas numéricas, cuyos resultados se comparan con las soluciones analíticas y numéricas obtenidas por otro simulador, respectivamente.

1era Prueba

La simulación se lleva a cabo para una fase tomando en cuenta el modelo acoplado con la geomecánica. La geometría del yacimiento, con 96 hexaedros, de 2 x 2 x 3 metros se muestra en la figura (3). Las propiedades del fluido y la geomecánica se describen en las tablas (1) y (2). Las condiciones iniciales son consideradas: 1.64 MPa de presión de fluido y $2.5E-04$ de deformación en la dirección de la coordenada Z. Se asume que existe una sobre carga sobre la parte superior de la muestra de 4 MPa. Además, se considera que no existe intercambio de fluido y desplazamiento alrededor e inferior de la misma. La parte superior se mantiene a una presión de 0 Mpa y es libre de movimiento. El paso de tiempo se establece a 0.05 minutos, y los resultados son tabulados para diferentes intervalos de tiempo, véanse las Tablas (3) y (4).

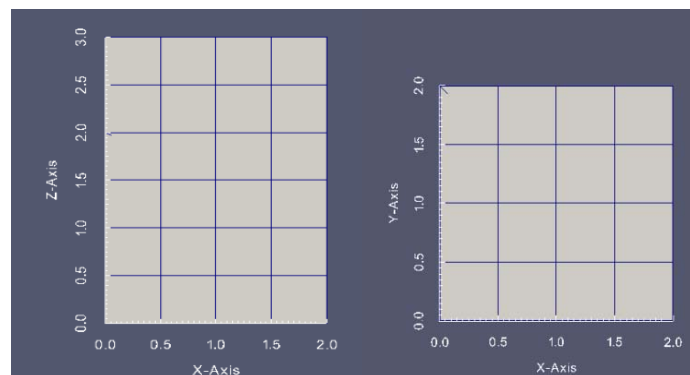


Figura (3) : Malla compuesta por 96 hexahedros.

Propiedades de la roca	
Modulo de Young	1.44E+04Mpa
Razon de Poizon	0.2
Compresibilidad total	8.1301E-05
Densidad del Roca	2000Kg/m ³

Tabla (1): Propiedades de la roca para la 1era prueba

Propiedades del fluido	
ViscosidadCinematica	1.3E+04
Porosidad	0.3
Permeabilidad	2.0E-13m ²
Densidad del Fluido	940Kg/m ³

Tabla (2): Propiedades del fluido para la1era prueba.

Dezplazamiento del tope de la muestra. (m)		
	Programa	Analítica
1 min.	-5.87E-04	-5.89E-04
5 min.	-6.49E-04	-6.491E-04
10 min.	-7.29E-04	-7.29E-04

Tabla (3): Resultado de desplazamiento de la 1era prueba

Presión del fluido en el centroide de la muestra. (Mpa)		
	Programa	Analítica
1 min.	1.600	1.612
5 min.	0.686	0.686
10 min.	0.226	0.226

De los resultados que se muestran en las tablas (3) y (4), se observa que existe gran precisión en los resultadosobtenidos por el programa. Los resultados son iguales para los minutos 5 y 10, considerando tres cifrassignificativas.

2da Prueba

Para esta prueba se realiza una simulación usandoel modelo de dos fases (petróleo-agua), y no se toma en cuenta el acople con la geomecánica.La geometría del yacimiento es de 4 metros de profundidad, 120 metros de largo y 120 metros de ancho, Figura (4).

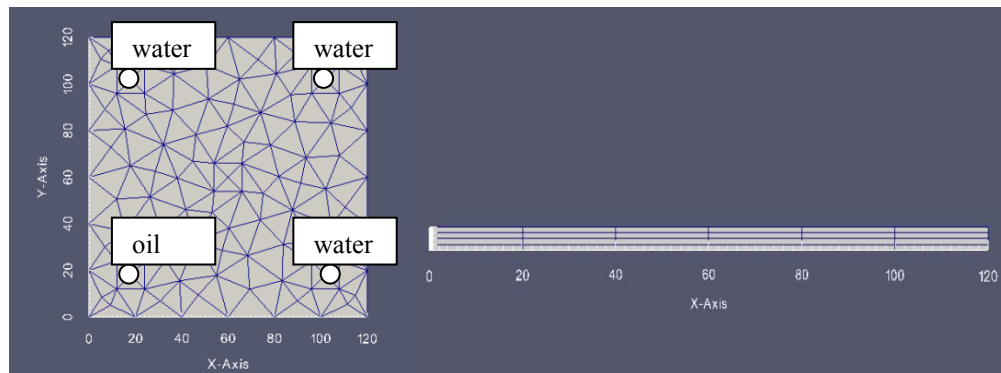


Figura (4): Malla de 120x120x4 metros, compuesta por832 elementos tipo prismas y cuatro capas de profundidad.

Se consideran tres pozos de inyección de agua en tres esquinas del yacimiento y un pozo productor en la esquina restante. Los cuatro pozos atraviesan las cuatro capaz del yacimiento y se asumentienen lastazas de5.4 m³/día. Las relaciones de la permeabilidad relativa de la fase agua se enlista en la tabla (5). La permeabilidad intrínsecaposee un valor del1.3 E-04 m².Los fluidos se asumen que son incompresibles con valores en densidad de 1000Kg/m³para el agua y 940 Kg. /m³para el petróleo. Las viscosidades se establecen: 1.222E-07 MPa/s. y 1.09E-09 MPa/s para el petróleo y agua, respectivamente. La compresibilidad del esqueleto solido se asume 8.1301E-04 1/MPa. Referente a las condiciones iniciales, se considera que el yacimiento se encuentra a 30 Mpa, con saturación de agua de 0.41.

S_w	$P_{cow}(MPa)$	k_w	k_o
0.0	1.0	1.00	0.00
3.100E-03	0.9	0.83	0.00
6.201E-03	0.8	0.65	0.00
1.240E-02	0.6	0.33	0.0048
1.550E-02	0.5	0.24	0.0649
1.860E-02	0.4	0.15	0.125
2.480E-02	0.3	0.07	0.40
4.340E-02	0.22	0.00	1.00
8.000E-02	0.0	0.00	1.00

Tabla (5): Relación de la permeabilidad del petróleo y agua, y relación de la saturación de agua compresión capilar P_{cow} .

El paso de tiempo se establece a 1 día. Luego de 20 días de simulación, el campo de presión del yacimiento resulta, como se ilustra en la figura (5).

La figura al lado derecho muestra las superficies de contornos para varios niveles de presión.

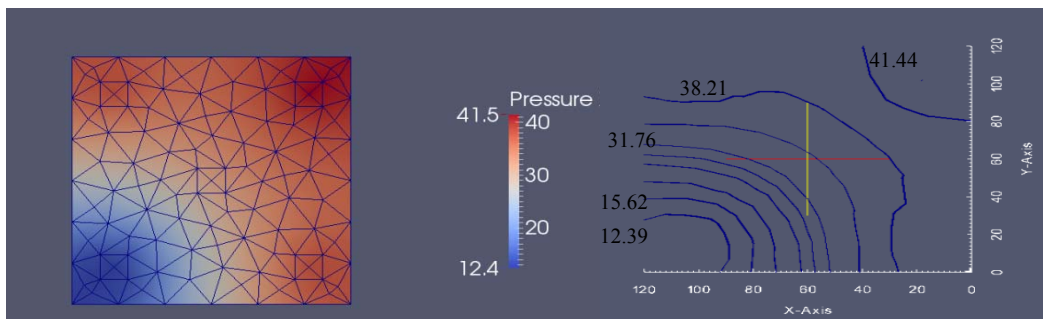


Figura (5): Resultados de presión de petróleo obtenidos por el programa.

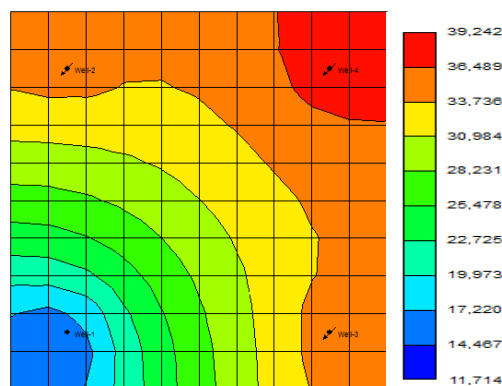


Figura (6): Resultados de presión de petróleo obtenidos por el programa Imex de CMG.

De los resultados, se observa claramente la gran similitud entre los resultados obtenidos por el programa y los obtenidos por el simulador bifásico Imex. De manera, que se comprueba el buen desempeño del programa.

Conclusiones y Trabajo Futuro

Los resultados numéricos obtenidos por el programa, demuestran que el programa posee la capacidad de resolver de forma acoplada o no los modelos de flujo de fluido. Además, presenta gran flexibilidad para hacer frente a distintos tipos de elementos finitos que pueda

contener la malla. De manera que, el procedimiento general del método de elementos finitos se logró implementar de forma satisfactoria.

Actualmente estamos en el proceso de mejoramiento continuo del programa. Entre los nuevos objetivos que nos hemos planteado, están:

- Incorporar la ecuación de la energía en el modelo.
- Optimizar en términos de almacenamiento de memoria y rapidez de cálculo.
- Adecuar al programa con más herramientas de escritura y lectura de archivos con formatos distintos.
- Incorporar estrategias más avanzadas de mayor rapidez de convergencia para la solución de las no linealidades.

Apéndice

La formulación discreta del modelo Geomecánico y Flujo de Fluidos se define de la forma:

$$Ku = V$$

$$K_{i,j} = \begin{pmatrix} A_{i,j}^{11} & A_{i,j}^{12} & A_{i,j}^{13} \\ A_{i,j}^{21} & A_{i,j}^{22} & A_{i,j}^{23} \\ A_{i,j}^{31} & A_{i,j}^{32} & A_{i,j}^{33} \end{pmatrix} ; \quad V_i = \begin{pmatrix} C_i^1 \\ C_i^2 \\ C_i^3 \end{pmatrix} ; \quad u_i = \begin{pmatrix} u_i^1 \\ u_i^2 \\ u_i^3 \end{pmatrix}$$

A continuación, se utiliza el símbolo Λ para denotar que se utiliza la ecuación (29) o (30) para aproximar los coeficientes. También se utilizan los sub-índices 1, 2, 3 en los coeficientes, de manera de definir las correspondencias: o (petróleo), w (agua) y g (gas), respectivamente.

Formulación Discretizada del Modelo Geomecánico

$$L_{i,j}^{mn} = \int_{\Omega} \left[\mu \left(\sum_{s=1}^3 \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_s} \frac{\partial N_{uj}}{\partial x_s} \right) \delta_{mn} + \mu \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_n} \frac{\partial N_{uj}}{\partial x_m} + \lambda \frac{\partial N_{ui}}{\partial x_m} \frac{\partial N_{uj}}{\partial x_n} \right] d\Omega \quad m = 1, 2, 3 \quad n = 1, 2, 3$$

Formulación Discretizada del Modelo de Una Fase.

$$H_{i,j} = \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\sum_{s=1}^3 K_{s,s}^A \frac{\partial N_{pi}}{\partial x_s} \frac{\partial N_{pj}}{\partial x_s} \right) d\Omega$$

$$S_{i,j} = \int_{\Omega} \frac{1}{M} N_{pi} N_{pj} d\Omega$$

$$Q_{pi,j}^{In} = - \int_{\Omega} \alpha N_{pi} \frac{\partial N_{uj}}{\partial x_n} d\Omega \quad n = 1, 2, 3$$

Formulación Discretizada del Modelo de Dos Fases (Petróleo-Agua).

$$H_{i,j}^{mn} = \int_{\Omega} \frac{k_m^A}{\mu_m B_m} \left(\sum_{s=1}^3 K_{s,s}^A \frac{\partial N_{pi}}{\partial x_s} \frac{\partial N_{pj}}{\partial x_s} \right) \delta_{mnd} d\Omega \quad m = 1, 2 \quad n = 1, 2$$

$$S_{i,j}^{11} = \int_{\Omega} \left(\frac{S_l^A S_l^A}{B_l^A M} - \frac{S_l^A P_{cow}^A S_w^A}{B_l^A M} - \frac{\phi S_l^A S_w^A}{B_l^A} + \phi S_l^A b_l^A \right) N_{pi} N_{pj} d\Omega$$

$$\begin{aligned}
S_{i,j}^{12} &= \int_{\Omega} \left(\frac{S_1^A S_2^A}{B_1^A M} + \frac{S_1^A P_{cow}^A S_w'^A}{B_1^A M} + \frac{\phi S_w'^A}{B_1^A} \right) N_{pi} N_{pj} d\Omega \\
S_{i,j}^{21} &= \int_{\Omega} \left(\frac{S_2^A S_1^A}{B_2^A M} - \frac{S_2^A P_{cow}^A S_w'^A}{B_2^A M} + \frac{\phi S_w'^A}{B_2^A} \right) N_{pi} N_{pj} d\Omega \\
S_{i,j}^{22} &= \int_{\Omega} \left(\frac{S_2^A S_2^A}{B_2^A M} + \frac{S_2^A P_{cow}^A S_w'^A}{B_2^A M} - \frac{\phi S_w'^A}{B_2^A} + \phi S_2^A b_2^A \right) N_{pi} N_{pj} d\Omega \\
F_{pi}^m &= \int_{\Omega} \left[\frac{\rho_{m_std}}{B_m^A \mu_m^A} k_m^A \left(\sum_{s=1}^3 g_s^A K_{s,s}^A \frac{\partial N_{pi}}{\partial x_s} \right) + \frac{q_{m_std}}{B_m^A} N_{pi} \right] d\Omega \quad m = 1, 2 \\
Q_{pi,j}^{mn} &= - \int_{\Omega} \frac{S_m^A \alpha}{B_m^A} N_{pi} \frac{\partial N_{uj}}{\partial x_n} d\Omega \quad m = 1, 2 \quad n = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

Formulación Discretizada del Modelo de Tres Fases (Petróleo-Negro).

$$\begin{aligned}
H_{i,j}^{mn} &= \int_{\Omega} \frac{k_m^A}{\mu_m^A B_m^A} \left(\sum_{s=1}^3 K_{s,s}^A \frac{\partial N_{pi}}{\partial x_s} \frac{\partial N_{pj}}{\partial x_s} \right) \delta_{mn} d\Omega \quad m = 1, 2, 3 ; n = 1, 2, 3 \\
H_{i,j}^{31} &= \int_{\Omega} \frac{R_{so}^A k_l^A}{\mu_l^A B_l^A} \left(\sum_{s=1}^3 K_{s,s}^A \frac{\partial N_{pi}}{\partial x_s} \frac{\partial N_{pj}}{\partial x_s} \right) d\Omega \\
S_{i,j}^{11} &= \int_{\Omega} \left(\frac{S_1^A S_1^A}{B_1^A M} - \frac{S_1^A P_{cgo}^A S_g'^A}{B_1^A M} - \frac{S_1^A P_{cow}^A S_w'^A}{B_1^A M} - \frac{\phi S_w'^A}{B_1^A} + \frac{\phi S_g'^A}{B_1^A} + \frac{\phi S_l^A}{B_1^A} \right) N_{pi} N_{pj} d\Omega \\
S_{i,j}^{12} &= \int_{\Omega} \left(\frac{S_1^A S_2^A}{B_1^A M} + \frac{S_1^A P_{cow}^A S_w'^A}{B_1^A M} - \frac{\phi S_w'^A}{B_1^A} \right) N_{pi} N_{pj} d\Omega \\
S_{i,j}^{13} &= \int_{\Omega} \left(\frac{S_1^A S_3^A}{B_1^A M} + \frac{S_1^A P_{cgo}^A S_g'^A}{B_1^A M} - \frac{\phi S_g'^A}{B_1^A} \right) N_{pi} N_{pj} d\Omega \\
S_{i,j}^{21} &= \int_{\Omega} \left(\frac{S_2^A S_1^A}{B_2^A M} - \frac{S_2^A P_{cgo}^A S_g'^A}{B_2^A M} - \frac{S_2^A P_{cow}^A S_w'^A}{B_2^A M} + \frac{\phi S_w'^A}{B_2^A} \right) N_{pi} N_{pj} d\Omega \\
S_{i,j}^{22} &= \int_{\Omega} \left(\frac{S_2^A S_2^A}{B_2^A M} + \frac{S_2^A P_{cow}^A S_w'^A}{B_2^A M} - \frac{\phi S_w'^A}{B_2^A} + \phi S_2^A b_2^A \right) N_{pi} N_{pj} d\Omega \\
S_{i,j}^{23} &= \int_{\Omega} \left(\frac{S_2^A S_3^A}{B_2^A M} + \frac{S_2^A P_{cgo}^A S_g'^A}{B_2^A M} \right) N_{pi} N_{pj} d\Omega
\end{aligned}$$

$$S_{i,j}^{31} = \int_{\Omega} \left(\begin{aligned} & \frac{S_3^A S_l^A}{B_3^A M} - \frac{S_3^A P_{cgo}^A S_g^A}{B_3^A M} - \frac{S_3^A P_{cow}^A S_w^A}{B_3^A M} + \frac{S_l^A R_{so}^A S_l^A}{B_l^A M} - \frac{S_l^A R_{so}^A P_{cgo}^A S_g^A}{B_l^A M} - \frac{S_l^A R_{so}^A P_{cow}^A S_w^A}{B_l^A M} \\ & - \frac{\phi S_g^A}{B_3^A} - \frac{\phi S_w^A R_{so}^A}{B_l^A} + \frac{\phi S_g^A R_{so}^A}{B_l^A} + \phi S_l^A R_{so}^A b_l + \frac{\phi S_l^A r_{ro}^A}{B_l^A} \end{aligned} \right) N_{pi} N_{pj}$$

$d\Omega$

$$S_{i,j}^{32} = \int_{\Omega} \left(\frac{S_3^A S_2^A}{B_3^A M} + \frac{S_3^A P_{cow}^A S_w^A}{B_3^A M} + \frac{S_l^A R_{so}^A S_2^A}{B_l^A M} + \frac{S_l^A R_{so}^A P_{cow}^A S_w^A}{B_l^A M} + \frac{\phi R_{so}^A S_w^A}{B_l^A} \right) N_{pi} N_{pj} d\Omega$$

$$S_{i,j}^{33} = \int_{\Omega} \left(\frac{S_3^A S_3^A}{B_3^A M} + \frac{S_3^A P_{cgo}^A S_g^A}{B_3^A M} + \frac{S_l^A R_{so}^A S_3^A}{B_l^A M} + \frac{S_l^A R_{so}^A P_{cgo}^A S_g^A}{B_l^A M} + \frac{\phi S_g^A}{B_3^A} + \phi S_3^A b_3 - \frac{\phi S_g^A R_{so}^A}{B_l^A} \right) N_{pi} N_{pj}$$

$d\Omega$

$$F_{pi}^1 = \int_{\Omega} \left[\frac{k_l^A \rho_l^A}{B_l^A \mu_l^A} \left(\sum_{s=1}^3 g_s^A K_{s,s}^A \frac{\partial N_{pi}}{\partial x_s} \right) + \frac{q_{1_std} \rho_{1_std}^A}{B_l^A} N_{pi} \right] d\Omega$$

$$F_{pi}^2 = \int_{\Omega} \left[\frac{k_2^A \rho_2^A}{B_2^A \mu_2^A} \left(\sum_{s=1}^3 g_s^A K_{s,s}^A \frac{\partial N_{pi}}{\partial x_s} \right) + \frac{q_{2_std} \rho_{2_std}^A}{B_2^A} N_{pi} \right] d\Omega$$

$$F_{pi}^3 = \int_{\Omega} \left[\frac{k_3^A \rho_3^A}{B_3^A \mu_3^A} \left(\sum_{s=1}^3 g_s^A K_{s,s}^A \frac{\partial N_{pi}}{\partial x_s} \right) + \frac{R_{so}^A k_l^A \rho_l^A}{B_l^A \mu_l^A} \left(\sum_{s=1}^3 g_s^A K_{s,s}^A \frac{\partial N_{pi}}{\partial x_s} \right) + \frac{q_{3_std} \rho_{3_std}^A}{B_3^A} + \frac{q_{1_std} R_{so}^A \rho_{3_std}^A}{B_l^A} \right]$$

$d\Omega$

$$Q_{pi,j}^{1n} = - \int_{\Omega} \frac{S_l^A}{B_l^A} \alpha N_{pi} \frac{\partial N_{uj}}{\partial x_n} d\Omega \quad n = 1, 2, 3$$

$$Q_{pi,j}^{2n} = - \int_{\Omega} \frac{S_2^A}{B_2^A} \alpha N_{pi} \frac{\partial N_{uj}}{\partial x_n} d\Omega \quad n = 1, 2, 3$$

$$Q_{pi,j}^{3n} = - \int_{\Omega} \left(\frac{S_3^A}{B_3^A} + \frac{R_{so}^A S_l^A}{B_l^A} \right) \alpha N_{pi} \frac{\partial N_{uj}}{\partial x_n} d\Omega \quad n = 1, 2, 3$$

Transformación Geométrica de Elementos Lagrangianos.

$$N_i(\xi) = N_i(x)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x_3} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \xi_3} \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{pmatrix}$$

$$dx_1 dx_2 dx_3 = \det J$$

Nomenclatura

σ	Tensor de esfuerzo
F	Fuerza sobre cuerpo
λ, μ	Coefficientes de Lamé
α	Coefficiente de Biot
p	Presión de poro
σ^0	Tensor de esfuerzo en el instante inicial
ε	Tensor de deformación
δ	Delta de Kronecker
ρ_r	Densidad de la roca
$\mathbf{g}$	Vector de gravedad
ϕ	Porosidad Euleriana
Φ	Porosidad Lagrangiana
V_p	Volumen poroso
V_b	Volumen neto
V_b^0	Volumen neto en el instante inicial
C_p	Compresibilidad de poro
ϕ^0	Porosidad euleriana en su estado inicial
C_s	Compresibilidad del esqueleto sólido
K	Permeabilidad Intrínseca
ρ	Densidad del fluido de una fase
μ	Viscosidad del fluido de una fase
q	Término fuente del fluido de una fase
P_{cow}	Presión capilar del sistema petróleo-agua
P_o, P_w, P_g	Presión de petróleo, agua y gas, respectivamente
S_o, S_w, S_g	Saturación de petróleo, agua y gas, respectivamente
k_o, k_w, k_g	Permeabilidad relativa del petróleo, agua y gas, respectivamente
μ_o, μ_w, μ_g	Viscosidad dinámica del petróleo, agua y gas, respectivamente
B_o, B_w, B_g	Factor volumétrico del petróleo, agua y gas, respectivamente
ρ_o, ρ_w, ρ_g	Densidad del petróleo, agua y gas, respectivamente
$\rho_{o_std}, \rho_{w_std}, \rho_{g_std}$	Densidad del petróleo, agua y gas, a condiciones estándar
Q_o, Q_w, Q_g	Término fuente del petróleo, agua y gas.
$q_{o_std}, q_{w_std}, q_{g_std}$	Término fuente del petróleo, agua y gas, a condiciones estándar
P_{cgo}	Presión capilar del sistema gas-petróleo
k_{row}	Permeabilidad del petróleo en el sistema capilar petróleo-agua
k_{rog}	Permeabilidad del petróleo en el sistema capilar gas-petróleo
k_{row}^0	Permeabilidad relativa del petróleo a saturación de agua residual
u	Vector desplazamiento
N_{ui}, N_{pi}	Función de forma del modelo geomecánico y flujo de fluido, respectivamente
L	Matriz de rigidez
Q_u, Q_p	Matriz de acople del modelo geomecánico y flujo de fluido, respectivamente
S	Matriz de masa
H	Matriz hidráulica
F_p	Vector fuente

Referencias

1. Gutierrez, M. and Lewis, R. (1998): "The Role of Geomechanics in Reservoir Simulation", SPE/ISRM 47392.
2. Gottardi, G. and Mesini, E. (1987): "A gas-oil reservoir model by Galerking's method", J. Pet. Sci. Eng., 1:115-125
3. Yves Renard and Julien Pommier (2014): "Get fem++ User Documentation".
4. Geertsma, J. (1973): "Land Subsidence Above Compacting Oil and Gas Reservoir", SPE 3730.
5. Leverett M.C. and Lewis, W.B. (1941): "Steady flow of gas-oil-water mixtures through unconsolidated sands", SPE AIME 142, 107-116.
6. Biot, M. (1941): "General Theory of three-dimensional Consolidation", Journal of Applied Physics, 12, 155-164.
7. Chen, H., Teufel, L. and Lee, R. (1995): "Coupled Fluid Flow and Geomechanics in Reservoir Study: Theory and governing equations", SPE 30752.
8. Cheng, Z. (2007): "Reservoir Simulation: Mathematical Techniques in Oil Recovery", SIAM, Philadelphia.
9. Nelson Inoue and Sergio A.B. (2009): "Answers to Some Questions About the Coupling Between Fluid Flow and Rock Deformation in Oil Reservoirs", SPE 125760.
10. Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R. L. (1989): "The Finite Element Method, volume 1. McGraw-Hill, London, 4th edition.